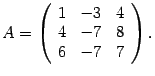
**Пример 19.10** Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы



**Решение.** Составляем характеристическую матрицу $ {A-{\lambda}E}$:

$\displaystyle A-{\lambda}E=\left(\begin{array}{rrr}1&-3&4\\ 4&-7&8\\ 6&-7&7\end...
...}{ccc}1-{\lambda}&-3&4\\ 4&-7-{\lambda}&8\\ 6&-7&7-{\lambda}\end{array}\right).$

Находим характеристический многочлен

\begin{multline*}
\vert A-{\lambda}E\vert=\left\vert\begin{array}{ccc}1-{\lambd...
...-7-{\lambda})\big)=\\
=-{\lambda}^3+{\lambda}^2+5{\lambda}+3.
\end{multline*}

Решим характеристическое уравнение

$\displaystyle -{\lambda}^3+{\lambda}^2+5{\lambda}+3=0.$

Подбором находим, что один корень уравнения равен $ -1$. Есть теорема, которая говорит, что если число $ c$является корнем многочлена $ {P(x)}$, то многочлен $ {P(x)}$делится на разность $ {x-c}$, то есть $ {P(x)=(x-c)Q(x)}$, где $ {Q(x)}$-- многочлен. В соответствии с этой теоремой многочлен $ {-{\lambda}^3+{\lambda}^2+5{\lambda}+3}$должен делиться на $ {{\lambda}-(-1)}$. Выделим в характеристическом многочлене этот множитель $ {{\lambda}+1}$:

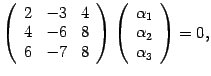
\begin{multline*}
-{\lambda}^3+{\lambda}^2+5{\lambda}+3=(-{\lambda}^3-{\lambda}...
...+3({\lambda}+1)=\\
=({\lambda}+1)(-{\lambda}^2+2{\lambda}+3).
\end{multline*}

Находим корни трехчлена $ {-{\lambda}^2+2{\lambda}+3}$. Они равны $ -1$и 3. Таким образом,

$\displaystyle -{\lambda}^3+{\lambda}^2+5{\lambda}+3=-({\lambda}+1)^2({\lambda}-3),$

$ {{\lambda}_1=-1}$-- корень кратности 2 17.7 b, $ {{\lambda}_2=3}$-- простой корень. Итак, собственные числа матрицы $ A$равны $ {{\lambda}_1=-1}$, $ {{\lambda}_2=3}$. Найдем соответствующие им собственные векторы.

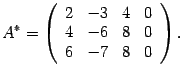
Пусть $ {{\lambda}=-1}$, тогда для собственного вектора $ {\alpha}$получаем матричное уравнение



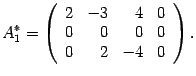
что соответствует системе уравнений

$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}2{\alpha}_1-3{\alpha}_2+4{\alpha}_3=0,\\ 
...
...2+8{\alpha}_3=0,\\
6{\alpha}_1-7{\alpha}_2+8{\alpha}_3=0.
\end{array}\right.$

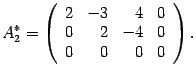
Решаем ее методом Гаусса (раздел ["Алгоритм нахождения решений произвольной системы линейных уравнений (метод Гаусса)"](http://mathserfer.com/theory/pyartli1/node54.html#__)). Выписываем расширенную матрицу системы



Первую строку, умноженную на числа $ -2$и $ -3$прибавляем соответственно ко второй и третьей строкам



Меняем местами вторую и третью строки



Возвращаемся к системе уравнений

$\displaystyle \left\{\begin{array}{r@{\;=\;}l}2{\alpha}_1-3{\alpha}_2-4{\alpha}_3&0,\\
2{\alpha}_2+4{\alpha}_3&0\end{array}\right.$

Базисный минор матрицы $ A_2^*$находится в первых двух столбцах и первых двух строках, ранг равен 2. Поэтому фундаментальня система содержит только одно решение. Переменные $ {\alpha}_1$и $ {\alpha}_2$оставляем в левой части, а переменное $ {\alpha}_3$переносим в правую часть

$\displaystyle \left\{\begin{array}{r@{\;=\;}l}2{\alpha}_1-3{\alpha}_2&-4{\alpha}_3,\\
2{\alpha}_2&4{\alpha}_3\end{array}\right.$

Полагаем $ {{\alpha}_3=1}$, находим $ {{\alpha}_2=2}$, $ {{\alpha}_1=1}$. Итак, собственному числу $ {{\lambda}_1=-1}$соответствует собственный вектор .

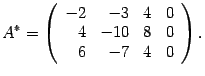
Пусть $ {{\lambda}=3}$, тогда для собственного вектора $ {\beta}$получаем матричное уравнение

$\displaystyle \left(\begin{array}{rrr}-2&-3&4\\ 4&-10&8\\ 6&-7&4\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}{\beta}_1\\ {\beta}_2\\ {\beta}_3\end{array}\right)
=0,$

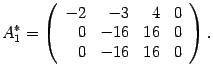
что соответствует системе уравнений

$\displaystyle \left\{\begin{array}{l}-2{\beta}_1-3{\beta}_2+4{\beta}_3=0,\\ 4{\...
...beta}_2+8{\beta}_3=0,\\
6{\beta}_1-7{\beta}_2+4{\beta}_3=0.\end{array}\right.$

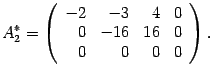
Решаем ее методом Гаусса. Выписываем расширенную матрицу



Первую строку умножаем на числа 2 и 3 и прибавляем соответственно ко второй и третьей строкам



Вторую строку умножаем на $ -1$и прибавляем к третьей

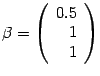


Возвращаемся к системе уравнений

$\displaystyle \left\{\begin{array}{r@{\;=\;}l}-2{\beta}_1-3{\beta}_2+4{\beta}_3&0,\\
-16{\beta}_2+16{\beta}_3&0\end{array}\right.$

Базисный минор матрицы $ A_2^*$находится в первых двух столбцах и первых двух строках, ранг равен 2. Поэтому фундаментальная система содержит только одно решение. Переменные $ {\beta}_1$и $ {\beta}_2$оставляем в левой части, а переменное $ {\beta}_3$переносим в правую часть

$\displaystyle \left\{\begin{array}{r@{\;=\;}l}-2{\beta}_1-3{\beta}_2&-4{\beta}_3,\\
-16{\beta}_2&-16{\beta}_3\end{array}\right.$

Полагаем $ {{\beta}_3=1}$, находим $ {{\beta}_2=1}$, $ {{\beta}_1=0.5}$. Итак, собственному числу $ {{\lambda}_1=-1}$соответствует собственный вектор . Чтобы избавиться от дроби, умножим собственный вектор на 2, получим собственный вектор с тем же самым собственным числом. В итоге собственному числу $ {{\lambda}_2=3}$соответствует собственный вектор .

**Ответ:** Собственные числа: $ {{\lambda}_1=-1}$, $ {{\lambda}_2=3}$, соответствующие собственные векторы: , .